



Università
di Brescia

Fabio Luterotti: Numeri nascosti

La poesia universale della matematica

Un'abilità numerica: contare

Alfred North Whitehead (1861-1947) *Science and the Modern World*

...During a long period, groups of fishes will have compared to each other in respect to their multiplicity, and groups of days to each other. But the **first man who noticed the analogy** between a group of **seven fishes** and a group of **seven days** made a notable advance in the history of thought. He was the first man who entertained a concept belonging to the science of pure mathematics...

il giorno in cui un uomo ha capito che 7 pesci e 7 giorni sono il medesimo concetto, il pensiero matematico ha compiuto un grande progresso

Un'altra abilità numerica: stimare o approssimare

L'abilità dell'approssimare, di stimare velocemente le quantità è un'abilità comune anche a molte specie animali; è molto utile per capire velocemente che cosa conviene fare. Si potrebbe chiamare quella precedente matematica dell'esattezza e quest'altra la matematica dell'approssimazione.

Incertezza quantificata

Tuttavia, ci sono delle circostanze in cui noi non abbiamo una soluzione certa, ma dobbiamo propendere per una soluzione probabile.

Dobbiamo prendere una decisione nell'incertezza, ma la decisione va presa su basi solide, sulla base dei numeri della matematica certa.

Dobbiamo definire bene quali sono le grandezze in gioco e poi possiamo eseguire una stima; quindi, abbiamo una collaborazione tra questi due tipi di matematica. O meglio, un connubio, ci aiutiamo grazie a queste due abilità: quella del contare e quella dello stimare.

Casi favorevoli e casi possibili

Noi lo sappiamo bene che, se tiriamo una moneta (con testa e croce), abbiamo 50 probabilità su 100 che venga testa e 50 che venga croce.

La situazione è simile per un dado non truccato: una probabilità su 6 di indovinare il risultato del dado.

E poi ci sono varie ramificazioni di questa prospettiva in cui dobbiamo fare dei calcoli per stabilire qual è la specifica probabilità, cioè il numero di casi favorevoli rispetto ai casi possibili. Ed è motivo di interesse capire qual è la probabilità di un evento che vogliamo che avvenga o che non avvenga.

Che cosa bisogna calcolare? Ci sono dei dati evidenti, dei numeri. E forse ci sono dei dati sono nascosti...

Il dilemma di Monty Hall

Un esempio molto semplice da descrivere, ma che nasconde, in un certo senso, dei dati è il cosiddetto dilemma o problema di Monty Hall.

Scelgo, fra i possibili, la narrazione di Ian McEwan in «Sweet Tooth» (in italiano «Miele»)

Nel brano di Ian McEwan i protagonisti sono Serena, laureata in matematica e Tom, letterato; sono stati reclutati dal governo britannico come aspiranti agenti segreti nell'ambito della guerra fredda. Si trovano a chiacchierare dopo cena in modo rilassato. Riassumo Il loro dialogo



Il dilemma di Monty Hall visto da Ian McEwan

Tom: Voglio che mi racconti qualcosa... qualcosa di interessante, no, di controintuitivo, di paradossale. Mi devi un bel racconto matematico.

Serena: Proviene da un gioco televisivo americano che si chiama *Let's Make a Deal*. Ricordo che il conduttore era un certo Monty Hall. Supponiamo che tu sia fra i concorrenti della trasmissione di Monty.

Di fronte a te hai tre porte chiuse, una, due e tre, e dietro una delle porte, non sai quale, c'è un fantastico premio.



Il dilemma di Monty Hall visto da Ian McEwan

Mettiamo che tu abbia scelto la porta numero uno, ma per il momento non la apriamo.

Quindi Monty, che sa dove si trova il premio, apre una porta che sa essere senza premio. Mettiamo la porta numero tre. Per cui tu sai il premio è o dietro la porta numero uno, quella che hai scelto, o dietro la porta numero due.

Ti propone di cambiare; ti conviene?



Il dilemma di Monty Hall visto da Ian McEwan

Tom: È ovvio. Scegliendo la porta numero uno partivo con una probabilità su tre. Quando la porta tre viene aperta le probabilità salgono a una su due. E lo stesso vale per la porta numero due.

Le probabilità che il premio sia dietro una delle due porte si equivalgono. Che io cambi o non cambi non fa differenza...



Il dilemma di Monty Hall visto da Ian McEwan

Serena: Ti conviene cambiare! La probabilità che il premio sia dietro la porta che hai scelto resta una su tre, quindi è l'altra che ha due possibilità su tre!

Tom non coglie **quando** è il momento in cui bisogna calcolare gli eventi favorevoli rispetto a quelli possibili: lo fa **dopo**, mentre va fatto **prima**; il fatto che Monty gli apra una porta senza premio, non fa cambiare nulla nel calcolo, la probabilità rimane la stessa.



Il dilemma di Monty Hall

Kevin Spacey

Film «21»

<https://www.youtube.com/shorts/EE9C8ZY9ARU>

[Kevin Spacey.mp4](#)



Fare propaganda con i numeri (da “La matematica è vita” di Kit Yates)

La morte di due adolescenti neri disarmati, Trayvon Martin e Michael Brown, fu il catalizzatore per la formazione e la rapida espansione del movimento Black Lives Matter (BLM). Tra il 2014 e il 2016 organizzò proteste di massa, fra cui marce e sit-in, in varie parti degli Stati Uniti.

Nel settembre 2016, BLM aveva sedi anche nel Regno Unito, e le sue manifestazioni suscitarono la reazione del giornalista (polemista) Rod Liddle.



Che cosa afferma Liddle?

“Il movimento è stato creato per protestare contro i poliziotti americani che sparano a sospettati neri invece di arrestarli. Non c’è dubbio che i poliziotti statunitensi hanno il grilletto un po’ facile. E magari soprattutto quando appare un sospettato nero.

Non c’è nemmeno alcun dubbio che il più grande pericolo per i neri negli Stati Uniti siano... ehm... altri neri. Di omicidi neri su neri ce ne sono in media più di quattromila all’anno. Il numero di uomini neri uccisi da poliziotti americani – a torto o a ragione – è poco più di cento all’anno. Su, fate i conti.”

ETNIA DELLA VITTIMA	TOTALE	ETNIA DEL COLPEVOLE	
		BIANCHI	NERI
BIANCHI	3167	2574 (81,3%)	500 (15,8%)
NERI	2664	229 (8,6%)	2380 (89,3%)

Qual è la prospettiva corretta?

Per lo stesso motivo, dato che ci sono oltre 40,2 milioni di cittadini statunitensi neri e solo 635.781 agenti di polizia a pieno titolo (quelli che portano un’arma da fuoco e un distintivo) non è sorprendente che più uccisioni siano commesse da neri che da agenti di polizia.

Liddle avrebbe dunque potuto porre un altro quesito, più sensato: «Se un cittadino statunitense nero incontra una persona mentre è da solo, da chi ha più probabilità di essere ucciso: un altro nero o un agente di polizia?».

UCCISORI	LA VITTIMA È NERA	NUMEROSITÀ DELLA POPOLAZIONE	UCCISIONI PRO CAPITE
CITTADINI NERI	2380	40.241.818	1/16908
AGENTI DI POLIZIA	307	635.781	1/2071

Abraham Wald (survivorship bias)

Abraham Wald nasce nel 1902 da una famiglia ebrea ortodossa a Klausenburg (o Kolozsvár in ungherese) che dopo la seconda guerra mondiale passò alla Romania e cambiò nome in Cluj.

Wald frequentò l'università locale, laureandosi nel 1926. Proseguì gli studi all'Università di Vienna, dove studiò matematica con un accademico famoso di nome Karl Menger.

Insomma, diventò un brillante matematico e lavorò accanto ad Oskar Morgenstern (uno dei fondatori della Teoria dei Giochi).

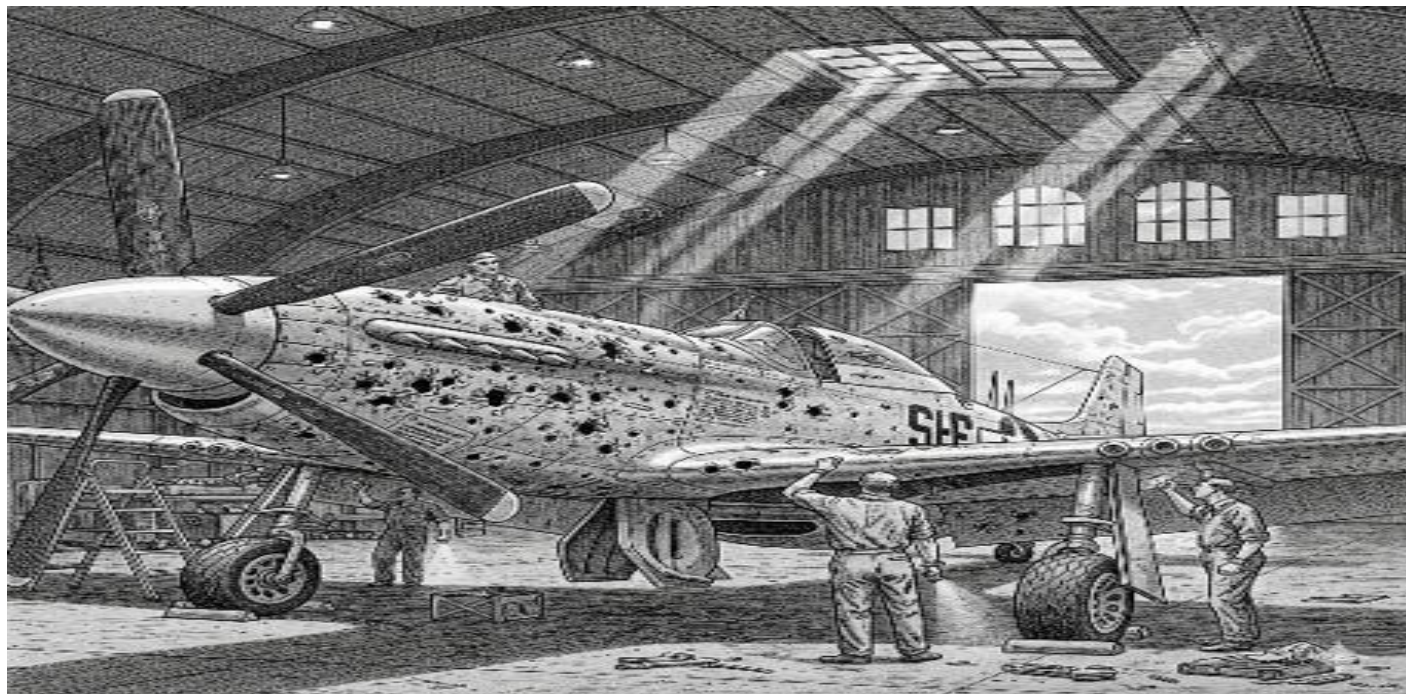


Abraham Wald (survivorship bias)

Qual è il ruolo di Abraham Wald?

Seconda guerra mondiale: gli angloamericani vogliono evitare che gli aerei vengano abbattuti dai caccia nemici; si possono «corazzare». Ma le armature rendono un aeroplano più pesante, e aeroplani più pesanti sono meno manovrabili e consumano più carburante.

Insomma, corazzare troppo gli aeroplani costituisce un problema; corazzarli troppo poco costituisce a sua volta un problema. Da qualche parte tra questi due estremi c'è una scelta ottimale, cioè corazzare solo alcune parti. Quali?



Abraham Wald (survivorship bias)

La maggior parte dei fori di artiglieria erano sulla fusoliera. Gli uomini dell'aviazione giunsero all'ovvia conclusione: mettere più armatura sulla fusoliera. Tuttavia, per essere sicuri, diedero i loro dati ad Abraham Wald.

Wald: Non vediamo danni ai motori perché gli aerei colpiti al motore **non tornano**. Dovete aggiungere armatura al motore, non alla fusoliera.

Wald aveva scovato l'errore cruciale nel ragionamento: la distorsione di sopravvivenza («survivorship bias»).

Parte dell'aeroplano	Fori di proiettile per piede quadrato
Motore	1,11
Fusoliera	1,73
Sistema d'alimentazione	1,55
Resto dell'aereo	1,8

Abraham Wald (survivorship bias)

L'analisi di Abraham Wald era stata meno sbrigativa e più raffinata; ciò viene dettagliato nella pagina web “Military story” da Michele Giuliani; Wald, da bravo scienziato, scrisse infatti un articolo “A method of estimating plane vulnerability based on damage of survivors”.

Si tratta di un lavoro scientifico rigoroso basato sulla struttura degli aerei, sulle diverse caratteristiche della contraerea e degli aerei avversari.

Da qui Abraham Wald conclude che va protetto il motore.

Ironia della sorte: Abraham Wald morirà in un incidente aereo nel 1950 e lo stesso Oskar Morgenstern gli renderà omaggio nella rivista “Econometrica”.

Screening di una popolazione (riferimento i testi di Gerd Gigerenzer)

Introduco un argomento ben conosciuto dagli esperti di analisi di dati, soprattutto nel mondo sanitario. Ne ho trovato un'ampia descrizione nei testi di Gerd Gigerenzer, esperto di processi decisionali e formatore su questi temi di centinaia di medici in Germania.

Faccio uso di un apologo per rendere il quadro più leggero.



Partiamo da una storia ambientata nel futuro.

Siamo nella repubblica autonoma STEM; il nuovo ministro della Salute matematica vuole mostrare di non essere stato scelto per motivi di appartenenza politica; cerca quindi di assumere qualche iniziativa eclatante; vuole affrontare l'insorgere una potenziale pericolosa malattia (la «**numerite**») che potrebbe minare le basi culturali della repubblica: si tratta di un'infezione da numeri.

Per ora non è molto diffusa, ma il ministro decide di agire e propone uno *screening* di massa per questa malattia. Ha a disposizione un test preliminare, semplice da sottoporre alla popolazione (non è stato precisato se si tratti di risolvere un integrale, una disequazione irrazionale o di calcolare una tabellina senza calcolatrice...).



Screening per la numerite

Gli esperti gli consigliano di approfondire la specificità e la predittività del test, ma il ministro vuole mostrare la sua operosità e procedere celermente. Questo test potenzialmente individua la malattia, ma è un esame preliminare, poi bisognerebbe fare degli approfondimenti. Ha dei limiti come molti altri: ha un tasso di identificazione dell'80% e un tasso di falsi positivi del 10%.

Lo stesso ministro si sottopone al test e **risulta positivo!** Il ministro **teme di essere malato!** Il tasso di identificazione potrebbe voler dire che all'80% ha contratto la malattia?



Qualche calcolo elementare

Si deve tenere conto del contesto (tecnicamente statistica bayesiana).

Secondo Gigerenzer, invece di fare calcoli con le percentuali (ostici per alcune persone), conviene ragionare con le cosiddette frequenze naturali (nel mondo della sanità lo si sa bene).

Consideriamo per semplicità un campione di 1000 persone; solo 10 avranno la numerite e il test risulterà positivo per 8 (80% di identificazione, ci sono falsi negativi).

Se si sottopongono al test 1000 persone, 10 hanno la malattia (e 8 risultano positive), 990 non hanno la malattia; di queste 99 risultano (falsi) positivi; quindi su 1000, $8+99=107$ risultano positive; qual è la probabilità di avere (veramente) la malattia?

Veri positivi/tutti i positivi

$8/107=0,074$ (cioè circa il 7,4%)

Il ministro è sollevato...



NUMERI NASCOSTI!

Grazie per l'attenzione

