



Università
di Brescia

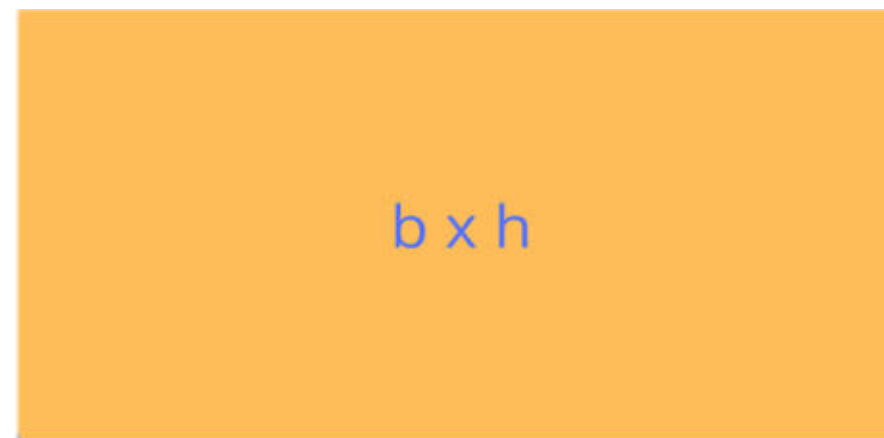
Fabio Luterotti: Tutto è numero, anche gli algoritmi

La poesia universale della matematica

Perché gli algoritmi?

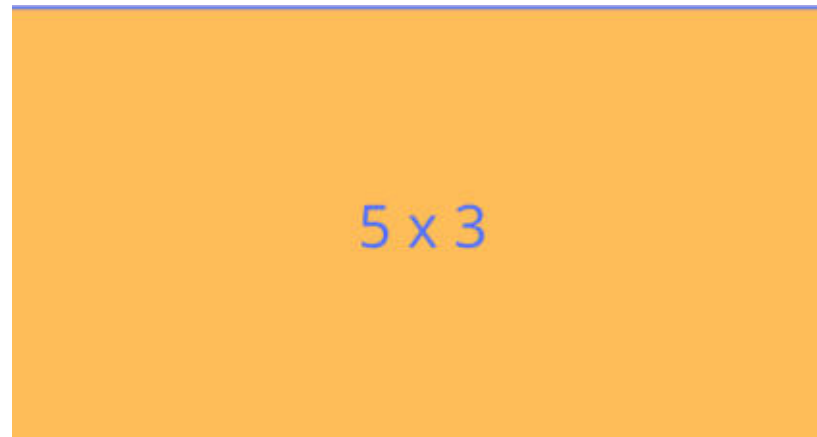
La matematica viene introdotta per risolvere dei problemi. Quando questi problemi sono ricorrenti viene usato un metodo comune, cambiando solo i dati.

Immaginiamo, ad esempio, che si debba calcolare l'area di un appezzamento di terra che ha la forma di un rettangolo; è chiaro a tutti che si moltiplica la lunghezza della base per la lunghezza dell'altezza.



Rettangolo

Quindi che la base misuri 5 e l'altezza 3



o che la base sia 4 e l'altezza 7

il metodo è sempre lo stesso ed è quello che si può legittimamente chiamare un (semplice) algoritmo.

Una definizione

Che cos'è un algoritmo in generale? Ho trovato alcune definizioni molto attuali. La prima, contenuta in un glossario a cura di **Federico Cabitza**, informatico e docente di “Interazione uomo-macchina”:

“Qualsiasi insieme di istruzioni che, se eseguite passo-passo, permettono a un agente (computazionale) di eseguire un compito specifico, raggiungere un obiettivo specifico o risolvere un problema.”

Un'altra definizione

La seconda, contenuta in un altro glossario a cura di **Alfio Quarteroni**, esperto di Analisi numerica e di matematica computazionale ed applicata: un algoritmo è una...

“Sequenza finita di istruzioni ben definite, finalizzate alla risoluzione di un problema o di una classe di problemi. Un algoritmo può essere tradotto in software (attraverso opportuni linguaggi di programmazione) ed essere così eseguito da un computer.”

Più o meno abbiamo inteso che si tratta di una sequenza di istruzioni, da eseguire o da fare eseguire, per risolvere dei problemi.

Equivoco

Prima di analizzare qualche semplice algoritmo e di scoprire da dove viene questo termine, voglio fare notare una curiosità.

Qualcuno può pensare che la parola **algoritmo** sia simile a **logaritmo**, perlomeno come etimologia; quel qualcuno può avere un lapsus e dire o scrivere logaritmo al posto di algoritmo, come mi è capitato di vedere un po' di mesi fa in un sottotitolo di un quotidiano online che diceva:

La previsione del **logaritmo** è stata fatta su chi, nell'arco dei tre anni successivi, avrebbe sviluppato la malattia...

Alzheimer: un sistema di intelligenza artificiale supera ogni test di valutazione finora usato



14 Settembre 2024

La previsione del **logaritmo** è stata fatta su chi, nell'arco dei tre anni successivi, avrebbe sviluppato la malattia e comprendeva forme

Algoritmo o logaritmo?

La svista si ripeteva coerentemente nel testo.

No, il logaritmo, pur prezioso, non c'entra.

Qui ci occupiamo di capire qualche semplice algoritmo.

Cosa fai il logaritmo

Il logaritmo PPM (*predictive prognostic model*) messo a punto dai ricercatori ha dimostrato in vari coorti di pazienti USA, UK e di Singapore di essere capace di predire **chi** fra quelli con MCI (smemoratezza patologica stabile o progressiva) o CN (cognitività normale presintomatica) **evolverà in malattia di Alzheimer nell'arco di 3 anni.**

Moltiplicazione in colonna

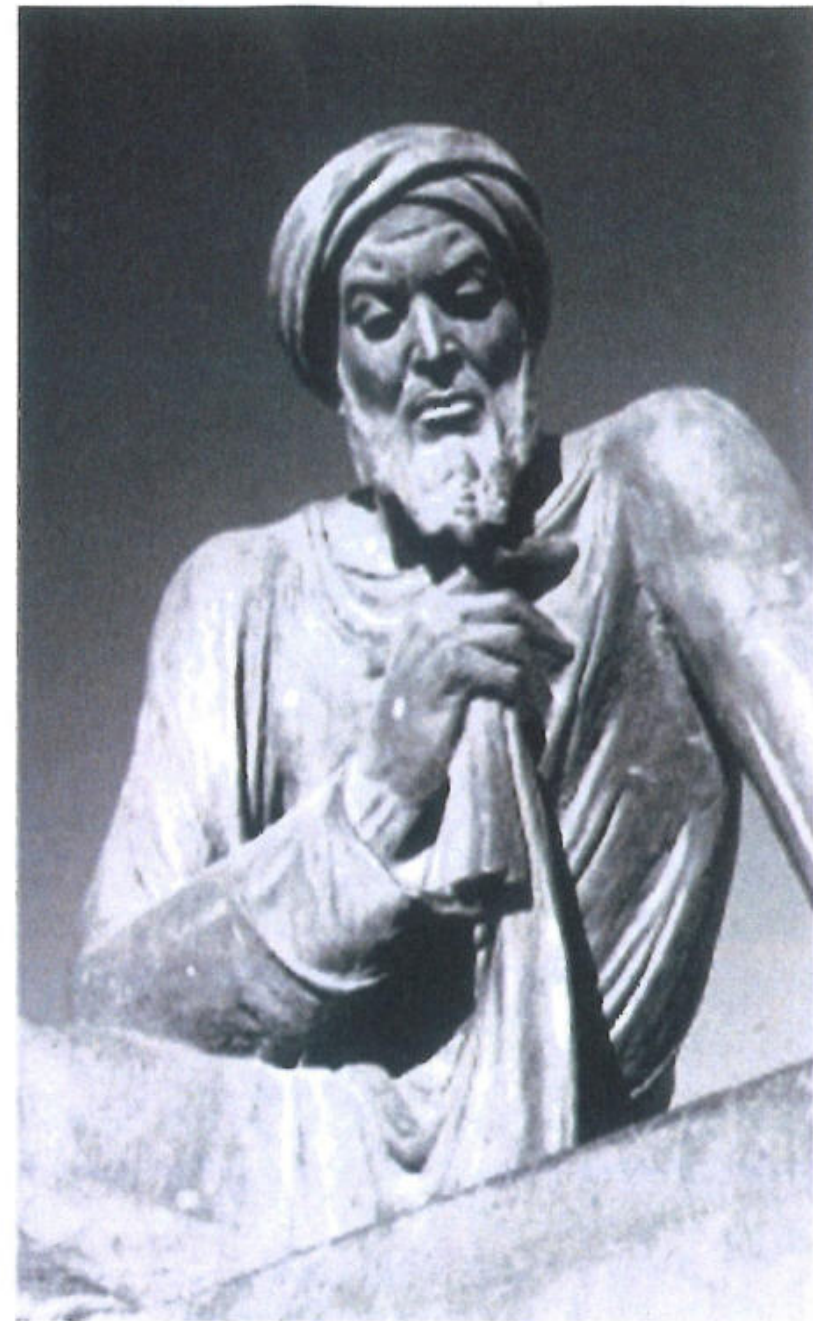
- Proviamo a moltiplicare 37 per 49
 - Facciamo anche una prova?
 - Come facevano gli antichi Egizi?
- [Moltiplicazione collegamento.Ink](#)
 - [prova del nove - collegamento.Ink](#)
 - [moltiplicazione egizia - collegamento.Ink](#)

Da dove viene la parola algoritmo?

Viene da quello che è il padre dell'algebra.
Cioè Muhammad Ibn Musa Al-Khwarizmi.

Intorno all'820 fece parte della famosa Casa della saggezza, fondata dal califfo Al Mamun a Baghdad.

Il libro più noto di Al-Khwarizmi si intitola *al-Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa al-muqābala*, tradotta da Roberto di Chester con il titolo di *Liber algebrae et almucabala* (da qui il termine Algebra che indicava una delle tecniche di risoluzione).



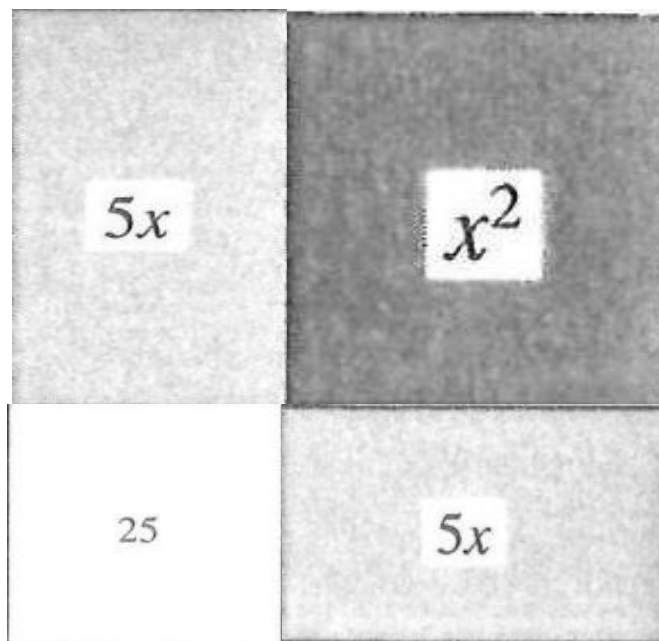
Algorismi...

Inoltre nel testo si faceva uso della notazione posizionale degli indiani; veniva quindi chiamato *De numero Indorum* con autore Algorismi; poi *Algorismi De numero Indorum*.

Infine solo *Algorismi*, identificando l'autore con le procedure contenute. La domanda che ci poniamo è: nel testo di Al-Khwarizmi ci sono effettivamente delle procedure da seguire passo passo per risolvere dei problemi? Proprio così!



Completamento del quadrato $x^2 + 10x = 39$



- L'area del quadrato di lato x è x^2
- sommata alle aree dei due rettangoli (di lati 5 e x) dà 39
- Completiamo il quadrato con un quadrato di lato 5 e quindi di area 25
- Il quadrato "grande" completato ha area $39+25=64$
- Il lato del quadrato "grande" quindi è 8 che è dato da $x+5$ per costruzione, quindi
- $x + 5 = 8 \rightarrow x = 3$

Sistemi numerici

Due grandi culture matematiche antiche:

Egizi: sistema additivo a base 10 (un simbolo diverso per il numero 1, per il 10, etc..)

Babilonesi (o mesopotamici in generale): sistema posizionale a base 60 (il valore del simbolo dipende dalla posizione)

George Gheverghese Joseph nel libro *C'era una volta un numero* sottolinea che un sistema numerico si giudica dalle caratteristiche seguenti:

- facile da scrivere
- privo di ambiguità
- consente calcoli veloci

Il sistema babilonese era abbastanza semplice da scrivere, ma era ambiguo, perché non aveva lo zero, ma veniva lasciato uno spazio di grandezza indefinita.

Valore	Geroglifico	Descrizione
1		trattino singolo
10		pastoia per bestiame o giogo
100		rotolo di fune
1000		ninfea o fiore di loto
10.000		dito
100.000	 oppure	girino o rana
1 milione o infinito		uomo con entrambe le mani alzate

Numeri dell'Antico Egitto.

Sistemi numerici

I vantaggi del sistema a notazione posizionale sono abbastanza ovvi, sia per l'economia dei simboli sia per la semplicità dei calcoli.

Possiamo immaginarci cosa potesse voler dire per gli antichi egizi fare i calcoli con il loro sistema che era additivo.

Noi possiamo averne fatto una saltuaria esperienza con i numeri romani, pure sistema additivo a base 10; provate a pensare ad eseguire la moltiplicazione, anche 37 per 49, con i numeri romani!

Questo vuol dire che il passaggio alla notazione posizionale, ai numeri indoarabici che conosciamo, ha consentito a molte persone di fare della matematica autonomamente, senza rivolgersi a degli specialisti. È stato un momento di democratizzazione del sapere. C'è un "eroe" italiano in questa rivoluzione per il mondo occidentale: Leonardo Fibonacci che nel 1202 pubblica un testo di matematica, usando le "figure degli Indi", anziché i numeri romani, 0 incluso!



Sistemi numerici

Perché la base 60? Sembra così scomoda, tanto da dover introdurre un simbolo per il 10; non si sa, forse era comodo ragionare sui multipli di 60 per misurare il tempo, o forse per limitare l'uso delle frazioni, avendo 60 molti divisori. Di fatto, tramite la matematica greca, tracce della base 60 sono significativamente rimaste: la misura del tempo (l'ora di 60 minuti!) e degli angoli (l'angolo giro misura 360 gradi).

Dando per scontato che il sistema posizionale sia più efficiente, qual è la base migliore? Semplificando: base grande (come 60 o come 10), molti simboli da ricordare, ma numeri brevi da scrivere; base piccola come 2, pochissimi simboli da ricordare ma numeri molto lunghi. Se però i numeri lunghi li deve scrivere una macchina, potrebbe essere un'ottima scelta!

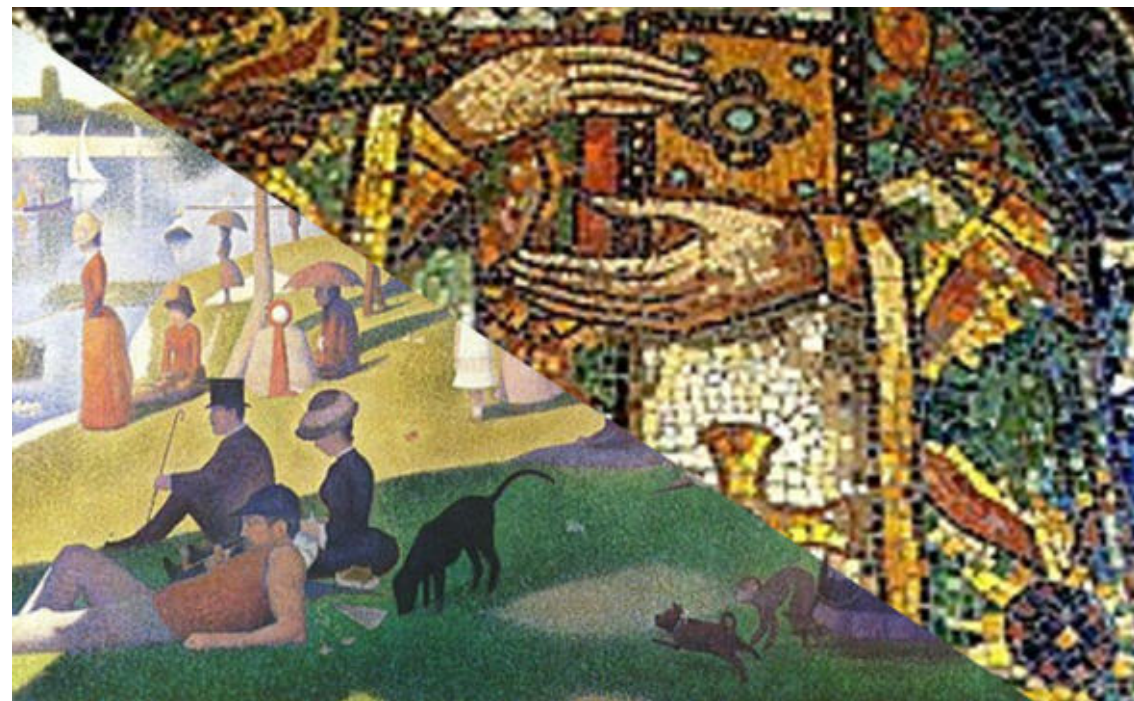


Immagini

Che cosa hanno a che fare i numeri con le immagini?

Proprio i numeri sono necessari per rappresentare le immagini.

Il principio è in realtà molto logico e lineare: provate a pensare ad un passatempo in cui puoi applicare un colore in ogni zona contrassegnata con il medesimo numero. Se applicassi il colore con un software, si tratterebbe della cosiddetta *pixel art*. Nell'ambito artistico possiamo pensare ai mosaici dell'epoca bizantina o alla corrente post-impressionista del *pointillisme*; anche qui potremmo considerare che ad ogni tassello di un certo colore corrisponde un numero.



Immagini

Proviamo a rappresentare la nostra immagine come un reticolo fitto e in ogni quadratino ci dovrebbe essere un colore: basta associare un numero. L'esempio più semplice è un'immagine in bianco e nero, dove ad ogni quadratino (un pixel) si associa 0 per il bianco e 1 per il nero. Se usassimo coppie di cifre ordinate, potremmo avere anche una semplice scala di grigi: 00 bianco, 01 grigio chiaro, 10 grigio scuro, 11 nero; è intuibile che, aumentando le posizioni a cui assegnare anche solo 0 e 1, si può andare molto avanti.

00	01	01	01	01	10	10	01
01	01	01	01	10	10	11	01
01	01	01	10	10	11	01	01
01	01	10	10	11	10	01	01
01	01	10	11	10	01	01	01
01	10	11	10	01	01	01	01
01	11	10	01	01	01	01	01

Immagini

Ho insistito sul vantaggio che dà la scelta della base due. Perché? Può essere un numero molto lungo, ma per la macchina questo non è un problema, per la sua velocità di elaborazione non è un problema. Quindi si può facilmente proseguire oltre al bianco, al nero e ai grigi, attribuendo un numero (in forma binaria) ad ogni colore nel seguente modo: si considerano i colori base rosso, verde, blu (quindi RGB red/green/blue) e in ogni pixel si attribuisce una sfumatura (quindi un numero) per ciascun colore base.

Stiamo miscelando un po' di rosso, un po' di verde e un po' di blu. Se un unico carattere è un bit, la lunghezza di 8 caratteri è un byte. Ho 2 scelte, 2 per 2, 8 volte per un byte. 2 alla ottava e fa 256 per ciascun colore base. La potenzialità di scelte diverse arriva a 256x256x256. Si potrebbero convertire anche nella base decimale.

255	255	128	192	192	225	255	255
255	120	192	295	240	200	192	192
120	160	225	300	160	240	320	136
120	200	250	600	600	360	350	255
60	255	192	900	200	182	200	190
00	200	225	255	128	248	192	255
80	255	128	160	200	192	180	255
255	120	160	200	255	192	255	055
R		G			B		

Immagini

Però 256 fa accendere una lampadina alla mente numerica: è 16 alla seconda. In molti casi si usa quindi la codifica nel sistema esadecimale, cioè a base 16 (sempre posizionale!). Con soli due caratteri si possono esprimere 256 combinazioni. Posso immaginare la tua curiosità: come si denotano questi caratteri? La base 16 non è particolarmente complicata, si usano le cifre da 0 fino a 9, le solite 10. E poi per andare oltre: A, B, C, D, E ed F.

Quindi con soli due caratteri del sistema in base 16 si riescono a rappresentare 256 valori. Due cifre esadecimali per il rosso, due cifre esadecimali per il verde, due cifre esadecimali per il blu. Quindi con solo sei cifre si può rappresentare un qualsiasi colore. Si tratta di una possibilità notevole, di grande semplicità per l'utente.



Riconoscimento di immagini

Data un'immagine, come viene riconosciuta da una macchina?

Aneddoto: la «fallacia del carro armato russo»

descritta da Gerd Gigerenzer nel suo libro “Perché l'intelligenza umana batte ancora gli algoritmi”:

L'esercito degli Stati Uniti addestrò una rete neurale a distinguere un carro armato russo da uno statunitense. Come di consueto, venne usata una cospicua serie di dati con foto dei carri armati; la rete venne addestrata su una metà e testata sull'altra. Alla fine, essa riusciva a padroneggiare il test con un'accuratezza del 100 per cento. Ma quando fu usata nel mondo reale, fece fiasco. Solo in seguito ci si rese conto che i carri armati statunitensi erano stati fotografati in una giornata di sole e quelli russi in una giornata nuvolosa. La rete intelligente aveva trovato l'indizio perfetto: le nubi.



TUTTO È NUMERO!

Grazie per l'attenzione

