



Università
di Brescia

Fabio Luterotti: Un assaggio di Matematica dell'IA

La poesia universale della matematica

Intelligenza artificiale

L'**Intelligenza Artificiale (IA)** è il ramo dell'informatica che si occupa di creare sistemi hardware e software capaci di **simulare** funzioni cognitive umane.

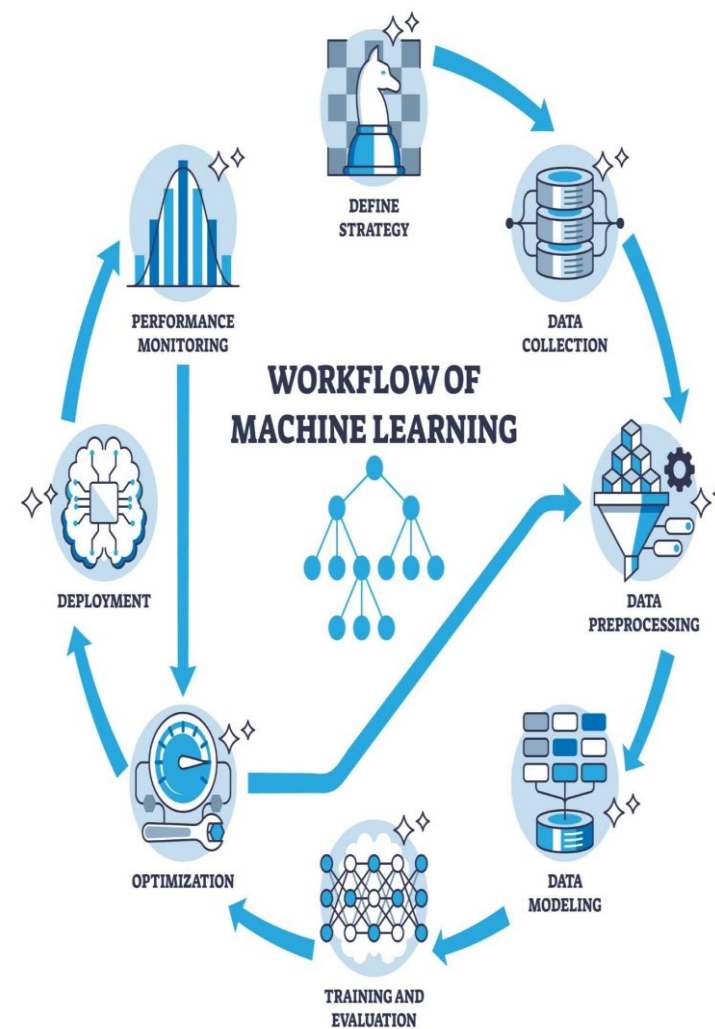
Invece di limitarsi a seguire istruzioni rigide pre-programmate, un'IA può "imparare" dai dati, riconoscere schemi e prendere decisioni per raggiungere obiettivi specifici.

Tre passaggi fondamentali:

Input di Dati: L'IA viene nutrita con enormi quantità di informazioni (testi, immagini, numeri).

Apprendimento (Machine Learning): Attraverso algoritmi matematici, il sistema individua correlazioni e regole all'interno di quei dati.

Output e Adattamento: Il sistema produce un risultato (una traduzione, una diagnosi medica, un'immagine) e, se riceve nuovi dati o correzioni, affina la sua precisione nel tempo.



Intelligenze

La teoria delle intelligenze multiple di Howard Gardner (1983) afferma che l'intelligenza non è un'unica abilità generale (QI), ma un insieme di diverse capacità distinte e indipendenti.

Gardner ha inizialmente individuato 8 forme di intelligenza (linguistica, logico-matematica, spaziale, corporeo-cinestetica, musicale, interpersonale, intrapersonale, naturalistica), aggiungendo in seguito una nona, quella esistenziale.

Quindi...

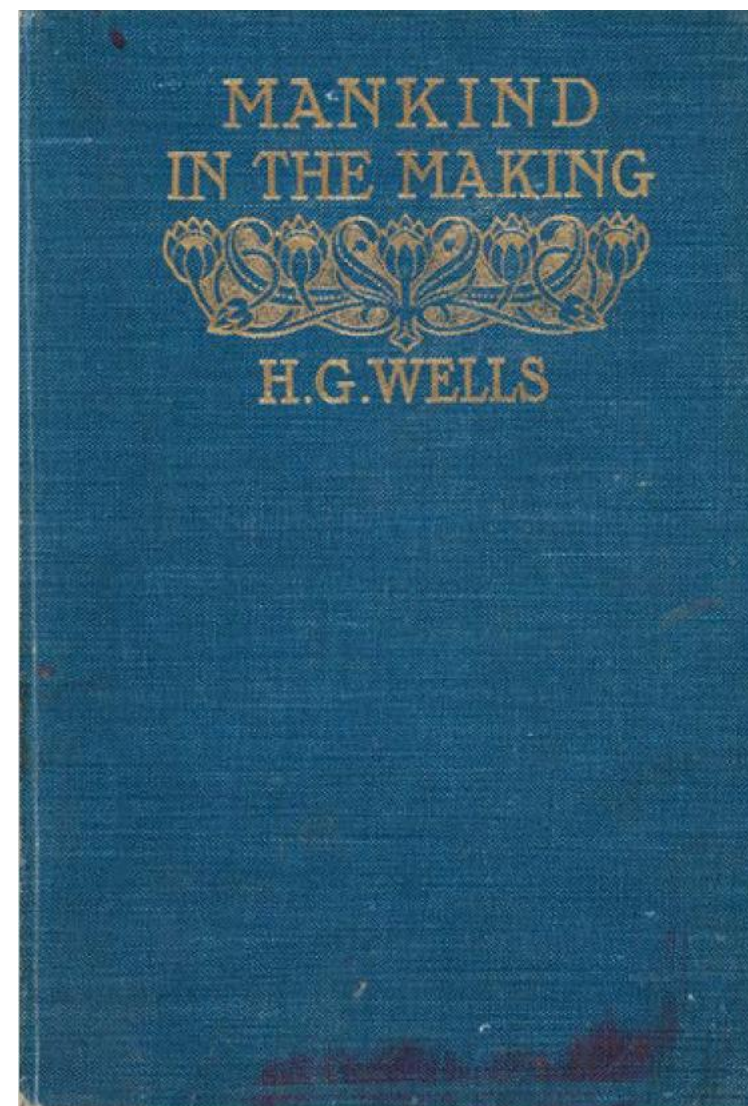


Una voce dal passato

Herbert George Wells (H.G. Wells), uno dei fondatori del genere letterario della fantascienza, scrive questa riflessione nel saggio “Mankind in the making” del 1903:

*La grande mole di scienza fisica, gran parte dei fatti essenziali della scienza finanziaria e gli infiniti problemi sociali e politici sono accessibili e pensabili solo a coloro che hanno ricevuto una solida formazione in analisi matematica, e potrebbe non essere molto lontano il momento in cui si comprenderà che per una completa iniziazione come cittadino efficiente di uno dei nuovi grandi e complessi stati mondiali che si stanno sviluppando, è **necessario saper calcolare, pensare in termini di medie, massimi e minimi**, così come lo è ora saper leggere e scrivere.*

.



Un assaggio

Gli obiettivi di questa osservazione rimangono attuali, eventualmente con qualche sfumatura diversa.

Alcune abilità le abbiamo delegate alle macchine.

Valore formativo nell'imparare in modo consapevole a fare i calcoli e ad applicare in modo critico degli algoritmi.

(Che cosa stiamo delegando alle macchine? Quali sono le conseguenze per noi essere umani?)

Quali strumenti e concetti matematici entrano in gioco?

Ce ne sono molti, come viene illustrato nel testo di Anil Ananthaswamy "Perché le macchine imparano: l'eleganza della matematica dietro all'AI" e di livello avanzato.



Traduttori traditori

Una storia tratta dal libro di Melanie Mitchell
“L’intelligenza artificiale. Una guida per esseri umani
pensanti”.

Il titolo della storia è “Al ristorante”

Un uomo entra in un ristorante e ordina un hamburger al sangue. Gli portano un hamburger carbonizzato. La cameriera si ferma al suo tavolo. «Va bene il burger?», chiede. «Oh, è perfetto!», risponde lui, spostando la sedia indietro e uscendo come una furia dal ristorante, senza pagare. La cameriera gli urla dietro, «Ehi, signore, e il conto?» Lei alza le spalle, borbottando tra i denti: «Ma perché lui è andato su tutte le furie?»

L’uomo ha mangiato l’hamburger?

Per noi umani è ovvio! Non l’ha mangiato! Se chiedessimo ad una macchina; che cosa risponderebbe?

In questo brano ci sono dei sottointesi, dei termini ambigui, dell’ironia; tutti aspetti a cui noi siamo educati; e le macchine?



Parole numerate

Da dove si parte? Che ruolo ha la matematica?

Le parole devono essere codificate con dei numeri, è il ponte di comunicazione con le macchine. I numeri non possono essere assegnati a caso, termini simili dovrebbero avere numeri simili, cioè vicini. D'altra parte il significato di una parola può essere definito proprio in relazione alle altre parole con cui essa tende a presentarsi, e delle parole che tendono a presentarsi con quelle stesse parole. Una parola come “brillante” la associamo a “diamante”, “rubino”, “pietra preziosa”, ma anche “acuta”, “intelligente”, facendo riferimento ad una persona. Gli esperti parlano di “spazi semantici a più dimensioni”.



Parole numerate

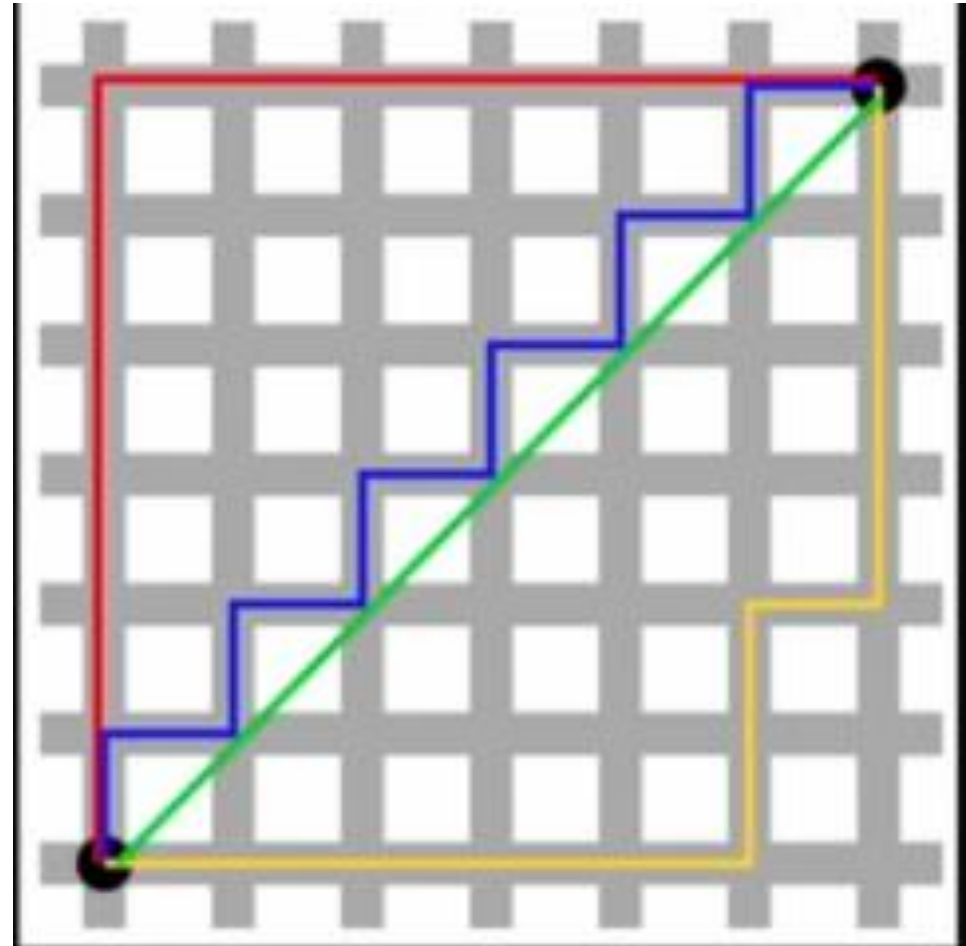
Un numero solo quindi non basta per una parola, ne servono di più: i matematici direbbero che servono più coordinate, come quelle che servono per determinare una posizione nel piano o nello spazio;

i fisici direbbero che servono dei vettori con le loro componenti; insomma abbiamo una sequenza di numeri che ci codificano un termine o un gruppo di termini e alla macchina serve un modo per scegliere un'altra parola vicina.

Si può determinare una distanza minima fra le parole, grazie ai numeri con cui sono state etichettate?

Vediamo un esempio a dimensione 2, nel piano: andiamo a trovare un amico che abita vicino; sappiamo che dobbiamo andare a destra, poi girare nella seconda via a sinistra, superare un incrocio e siamo arrivati;

la distanza percorsa viene indicata dai matematici “geometria di Manhattan” o “geometria del taxi”

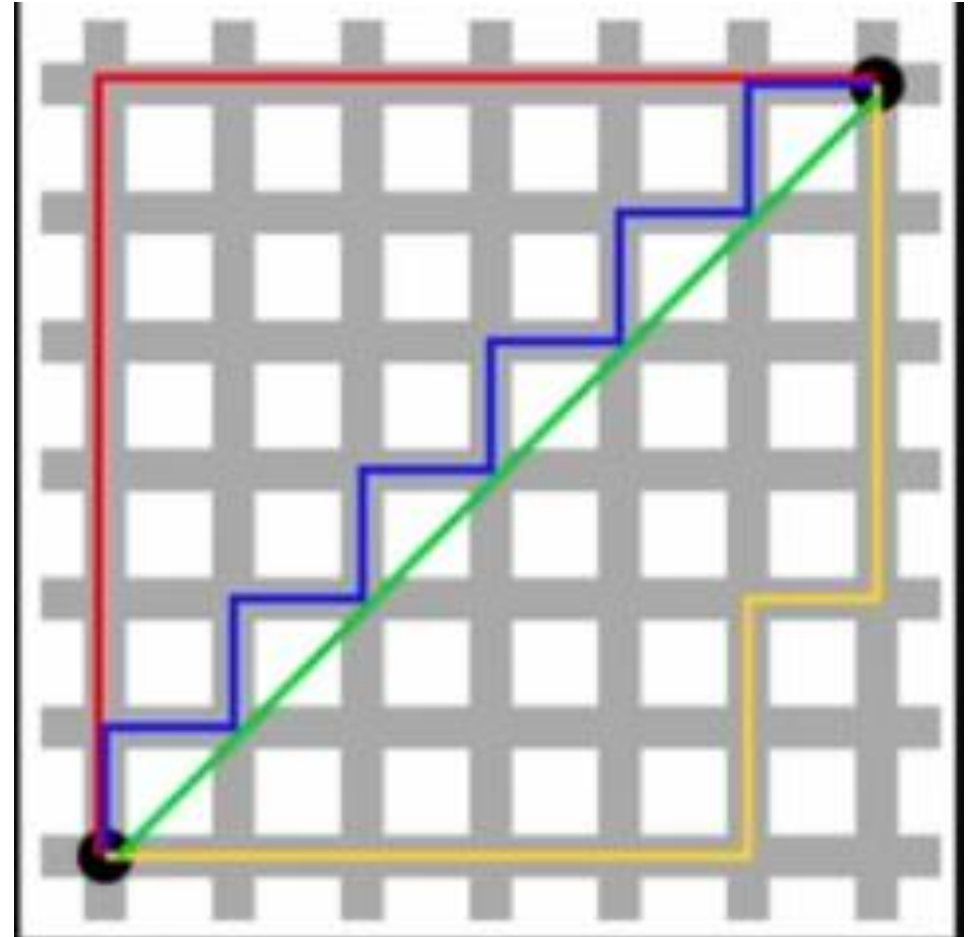


Parole numerate

Se avessimo potuto procedere in linea d'aria, avremmo percorso una distanza più breve, quella del terzo lato del triangolo (l'ipotenusa, se il triangolo è rettangolo).

Il procedimento di passare per il terzo lato si può estendere a qualsiasi dimensione spaziale, anche se non riusciamo a rappresentarla visivamente o graficamente e quindi a qualsiasi numero di componenti del vettore.

La macchina sarà in grado di verificare la distanza fra le rappresentazioni delle parole e operare delle scelte in base ad un fondamentale approccio **statistico**. Qualcuno ha sintetizzato, in modo un po' drastico, che un LLM (Large Language Model) è solamente un **pappagallo stocastico**.



Ottimizzazione

L'ottimizzazione in realtà fa parte della nostra vita quotidiana, tutti ne facciamo esperienza. Quando, ad esempio, impostiamo una destinazione sul navigatore, ci viene proposto (tramite un algoritmo!) il percorso più veloce (quindi minimo) in termini di tempo o più breve (pure minimo) in termini di distanza.

Quando vogliamo acquistare un bene, ad esempio un'automobile, cerchiamo di ottimizzare la risorsa economica che abbiamo a disposizione, scegliendo le caratteristiche più opportune per noi: consciamente o inconsciamente attribuiamo dei pesi alle caratteristiche; magari al colore un peso leggero ed uno maggiore al sistema di propulsione (termico, ibrido, elettrico). In molti ambiti dell'economia e dell'ingegneria vi sono procedure simili e si fa uso di strumenti matematici avanzati. Anche le macchine vengono istruite a comportarsi così.



Una storia antica

Problema di Didone (cioè quello di trovare l'area massima a parità di perimetro).

La sua storia (o leggenda) è illustrata da vari autori; ad esempio, da Enrico Giusti nel capitolo 8 del libro “La matematica in cucina” che la introduce citando un brano dell’Eneide di Virgilio. Il brano illustra che cosa vede Enea quando arriva a Cartagine; la traduzione in italiano che riporta Enrico Giusti è la seguente:

*Giunsero in questi luoghi, ov’or vedrai sorgere la gran
cittade e l’alta rocca della nuova Carthago, che dal
fatto Birsà nomassi, per l’astuta merce che, per
fondarla, fèr di tanto sito quanto cerciar di bue
potesse un tergo.*



Una storia antica

A che cosa allude Virgilio con questa frase? La parola Birsa vuol dire cittadella arroccata, ma ha un'assonanza con il termine greco pelle di bue. Didone era una principessa fenicia; lasciò sua città natale, Tiro (nel Libano attuale), dopo che suo fratello Pigmaglione le aveva ucciso di nascosto il marito Sicteo

Fuggita in nave con pochi seguaci, giunta dopo una travagliata navigazione sulla costa Nord dell'Africa nell'attuale Tunisia; Didone si stabilisce lì per fondare la città che poi doveva diventare Cartagine la rivale di Roma.

Il re Iarba di Numidia, concede tanta terra quanta poteva racchiudere la pelle di un bue.

Astuzia di Didone e... matematica.

A parità di perimetro...



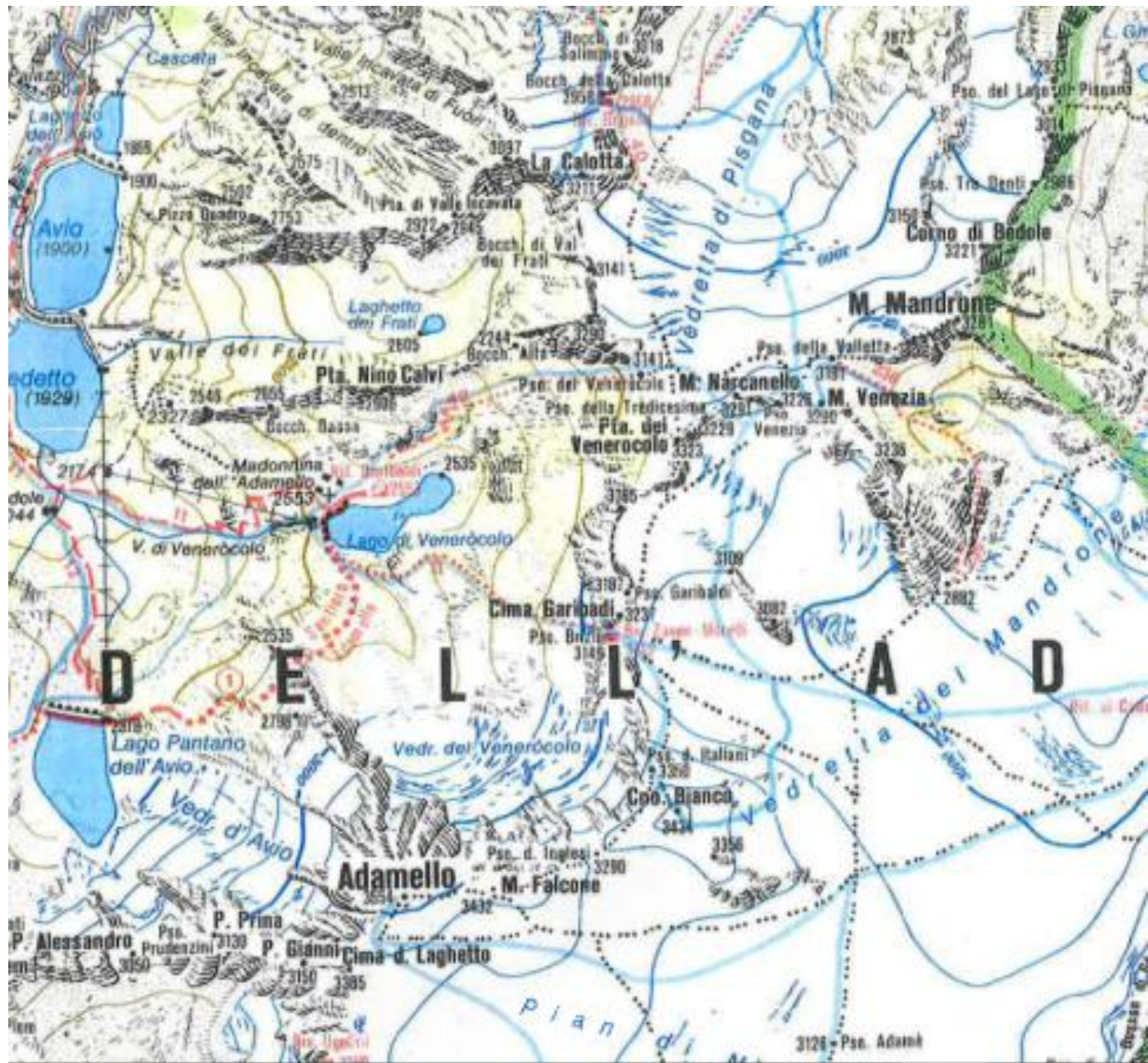
Discesa del gradiente

Qual è l'idea?

Se mi muovo su un percorso obbligato, come un sentiero, posso solo seguirlo e salirò e scenderò conseguentemente. Il percorso è unidimensionale, non ho scelte.

Immaginiamo invece di essere nei pressi della cima di una montagna o di un passo alpino e di dover scendere a valle in modo spedito, magari con poca visibilità; adesso non c'è una direzione obbligata, ma bisogna scegliere, se possibile, la via più veloce.

Consideriamo una cartina topografica; il pregio di una mappa di questo tipo è di indicare fiumi, laghi, toponimi, montagne, quote.



Discesa del gradiente

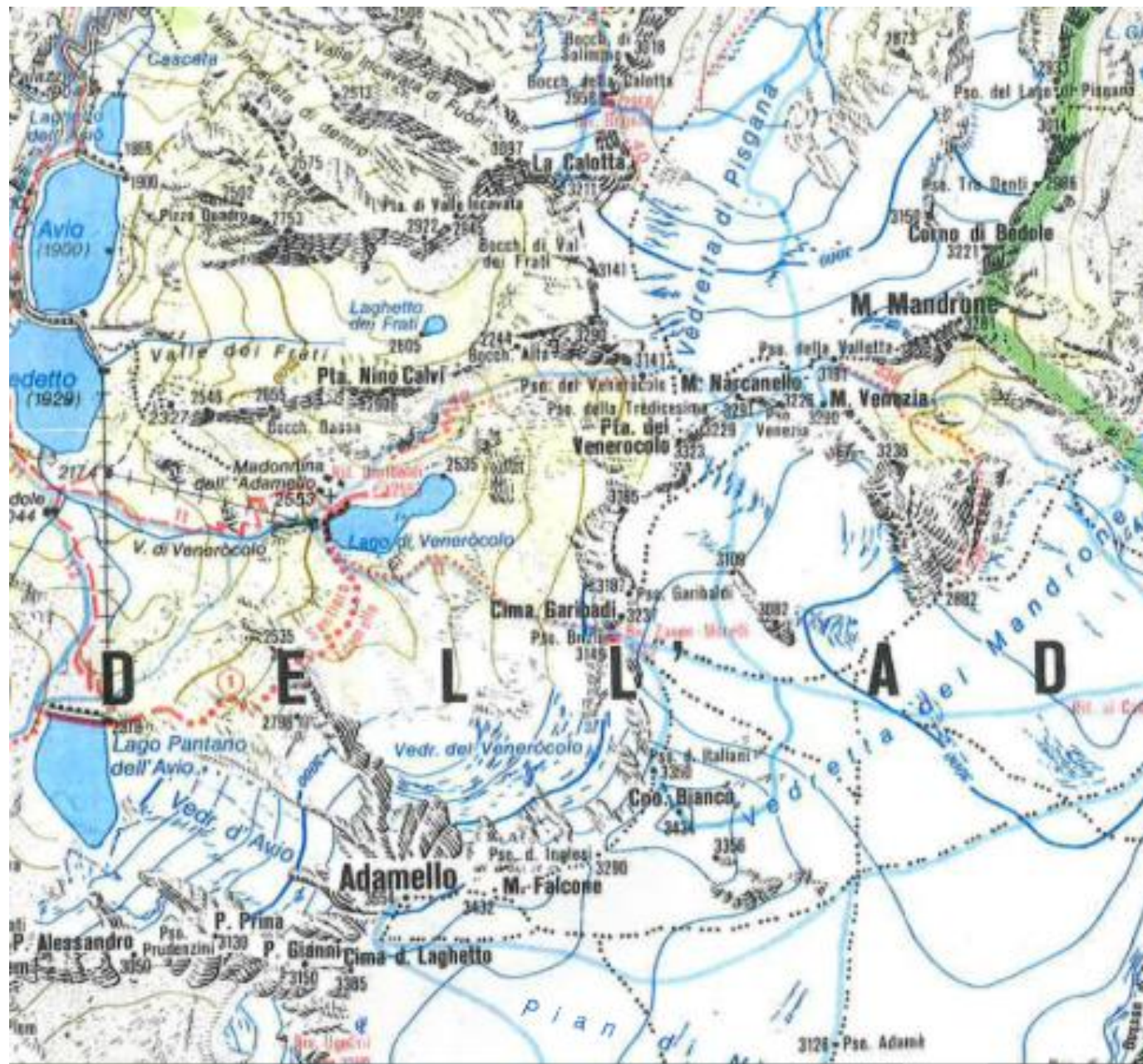
C'è un aspetto che mi interessa: la mappa fornisce una rappresentazione bidimensionale di una realtà tridimensionale; finché non ci sono dislivelli, questo non è rilevante, ma nel caso di una escursione in montagna sì.

Gli estensori della mappa usano questo accorgimento: disegnano delle linee che indicano la medesima altezza, sono le cosiddette curve di livello

Che cosa notiamo? Linee più vicine fra loro indicano zone più ripide ed è da lì che dovremmo scendere

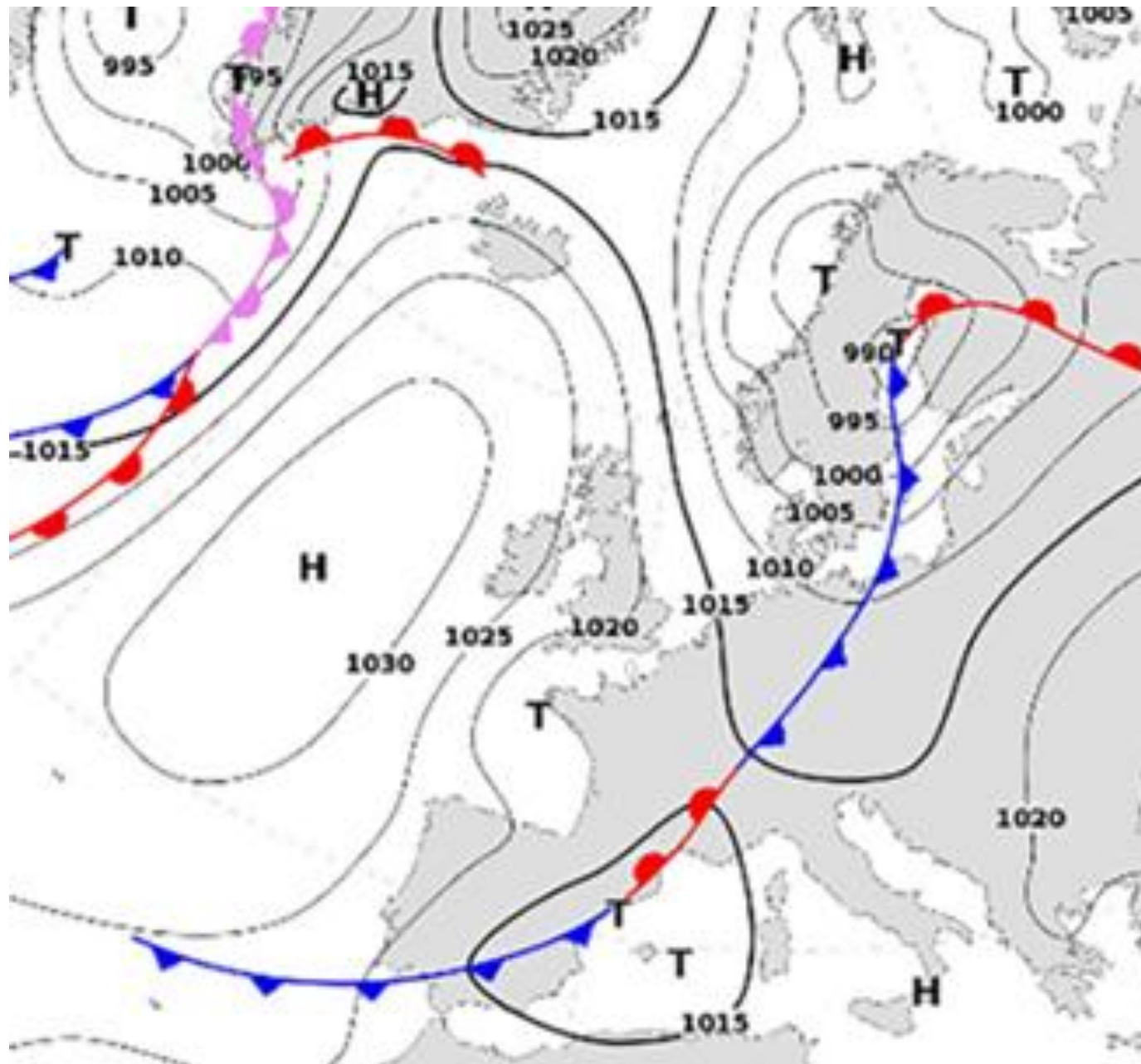
Matematicamente è il vettore gradiente (che è legato alle derivate) che indica la direzione di massima pendenza, cioè dove le curve di livello sono più vicine.

Quindi muovo un passo in quella direzione, ma di nuovo devo capire qual è la direzione di massima pendenza e poi muovere un altro passo e così via; la macchina si comporta così per raggiungere la finalità di ottimizzare.



Discesa del gradiente

Un'altra situazione che cerca di rendere l'idea di un fenomeno in tre variabili (due indicano il luogo, la terza la pressione) è quella delle previsioni del tempo: sulla cartina (bidimensionale) si vedono delle linee, sono le isobare, cioè dove la pressione atmosferica è costante (pressione bassa, tempo brutto; pressione alta, tempo bello); anche qui linee vicine tra loro indicano una repentina variazione delle condizioni meteorologiche e la direzione è fornita, di nuovo, dal gradiente.



C'è molta matematica!

Grazie per l'attenzione

